Intégration sur un intervalle quelconque

I. Intégrabilité des fonctions à valeurs positives

1°) Définition

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux.
On dit que f est intégrable (ou sommable) ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout segment $[\alpha,\beta] \subset I$:
$\int_\alpha^\beta f \leq M$. On pose alors $\int_I f = \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} \int_\alpha^\beta f$ appelé intégrale de f sur I .

Prop : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est continue par morceaux alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Ainsi, notre notion prolonge celle déjà existante.

2°) Suite exhaustive de segments

Déf : On appelle suite exhaustive de segments de I , toute suite de segments (J_n) croissante (i.e. $J_n \subset J_{n+1}$) et de réunion égale à I .

Prop : Pour tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$, il existe une suite exhaustive de segments de I .

Théorème :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive et (J_n) une suite exhaustive de segments de réunion égale à I . On a équivalence entre :
(i) f est intégrable sur I .
(ii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{J_n} f \leq M$.
De plus si tel est le cas $\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f$.

Cor : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et (J_n) une suite exhaustive de segments de I .
Si $\lim_{b\infty} \int_{J_n} f = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \ell$.
Si $\lim_{n\infty} \int_{J_n} f = +\infty$ alors f n'est pas intégrable sur I .

3°) Propriétés

Soit (J_n) une suite exhaustive de segments de I .

Prop : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Si f et g sont intégrables alors $\lambda.f$ et $f+g$ le sont aussi et de plus $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$ et $\int_I f+g = \int_I f + \int_I g$.

Prop : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues par morceaux positives.
Si $f \leq g$ et g est intégrable alors f l'est aussi et $\int_I f \leq \int_I g$.
Si $f \leq g$ et f non intégrable alors g ne l'est pas non plus.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive.
Si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle non vide J inclus dans I .

Théorème :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux positive et $c \in I$.
Notons $I^- = I \cap]-\infty, c]$ et $I^+ = I \cap [c, +\infty[$.
On a équivalence entre :
(i) f est intégrable sur I ,
(ii) f est intégrable sur I^+ et I^- .
De plus, si tel est le cas $\int_I f = \int_{I^-} f + \int_{I^+} f$.

Cor : Par ce résultat, on peut ramener tout problème d'intégrabilité sur un intervalle ouvert à deux problèmes d'intégrabilité sur des intervalles semi-ouverts.

4°) Intégrabilité par convergence

Théorème :

Soit $a<b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Pour $f:[a,b[\to\mathbb{R}^+$ continue par morceaux, on a équivalence entre :

(i) f est intégrable

(ii) $\beta\mapsto\int_a^\beta f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finies en b.

De plus, si tel est le cas : $\int_{[a,b[}f=\lim\limits_{\beta\to b}\int_a^\beta f(t)\mathrm{d}t$.

Cor : f est intégrable sur $]a,b]$ ssi $\lim\limits_{\alpha\to a}\int_\alpha^b f$ existe dans $\mathbb{R}$ et alors $\int_{]a,b]}f=\lim\limits_{x\to a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

f est intégrable sur $]a,b[$ ssi, pour $c\in]a,b[$, $\lim\limits_{x\to a}\int_x^c f$ et $\lim\limits_{x\to b}\int_c^x f$ existe dans $\mathbb{R}$ et alors

$\int_{]a,b[}f=\lim\limits_{\alpha\to a}\int_\alpha^c f+\lim\limits_{\beta\to b}\int_c^\beta f=\lim\limits_{\alpha\to a}\lim\limits_{\beta\to b}\int_\alpha^\beta f$.

5°) Intégrales de Riemann

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

Théorème :

$t\mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ ssi $\alpha>1$.

Théorème :

$t\mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ ssi $\alpha<1$.

Prop : Soit $a<b\in\mathbb{R}$.

$t\mapsto 1/(t-a)^\alpha$ est intégrable sur $]a,b]$ ssi $\alpha<1$.

$t\mapsto 1/(b-t)^\alpha$ est intégrable sur $[a,b[$ ssi $\alpha<1$.

II. Intégrabilité des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Les notions qui suivent prolongent celles qui précèdent.

1°) Définition

Déf : Une fonction $f:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux est dite intégrable ssi la fonction $|f|:I\to\mathbb{R}^+$ l'est.

On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I vers $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intégrables.

Théorème : (domination)

Soit $f:I\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

S'il existe $\varphi:I\to\mathbb{R}^+$ intégrable telle que $|f|\leq\varphi$ alors f est intégrable.

Pour définir la valeur de $\int_I f$, nous allons décomposer la fonction.

Prop : $f:I\to\mathbb{R}$ est intégrable sur I ssi f^+ et f^- le sont.

Déf : Si une fonction continue par morceaux $f:I\to\mathbb{R}$ est intégrable, on pose $\int_I f=\int_I f^+-\int_I f^-$.

Prop : $f:I\to\mathbb{C}$ est intégrable ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Déf : Si $f:I\to\mathbb{C}$ est intégrable alors on pose $\int_I f=\int_I\mathrm{Re}(f)+i\int_I\mathrm{Im}(f)$.

2°) Calcul par les suites exhaustives de segments

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et (J_n) une suite exhaustive de segments de I. Si f est intégrable sur I alors $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f$.

3°) Calcul par convergence

Théorème :

Soit $I = [a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux est intégrable alors $\beta \mapsto \int_a^\beta f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finies en b et $\int_{[a,b[} f = \lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f(t)\mathrm{d}t$.

Cor : Sous réserve d'intégrabilité

$\int_{]a,b]} f = \lim_{\alpha\to a} \int_\alpha^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{]a,b[} f = \lim_{\alpha\to a} \lim_{\beta\to b} \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$.

4°) Propriétés de l'intégrale

Théorème :

Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si f et g sont intégrables sur I alors $\lambda.f$ et $f+g$ le sont aussi et on a :

$\int_I \lambda.f = \lambda \int_I f$ et $\int_I f+g = \int_I f + \int_I g$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

Si f est intégrable sur I alors $\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$.

Théorème :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et intégrables sur I.

Si $f \le g$ alors $\int_I f \le \int_I g$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable sur I.

Si f est positive, $\int_I f = 0$ et I non singulier alors $f = 0$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et $c \in I$. On pose $I^+ = I \cap [c,+\infty[$ et $I^- = I \cap]-\infty, c]$.

On a équivalence entre :

(i) f est intégrable sur I,

(ii) f est intégrable sur I^+ et I^-.

De plus, si tel est le cas : $\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f$.

5°) Notation $\int_a^b f$

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

f est intégrable sur $[a,b]$ et $[a,b[$ avec $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$.

Déf : Soit I un intervalle d'extrémités $a \le b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et intégrable, on note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_I f$ et $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_I f$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur I.

Soit a,b,c des points de I ou des extrémités éventuellement infinies de I.

On a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

III. Outils pour justifier l'intégrabilité

1°) Comparaison

Théorème :

Soit $a<b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $f:[a,b[\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

Si $f\underset{a}{=}O(\varphi)$ avec $\varphi: I\to\mathbb{R}^+$ intégrable alors f est intégrable.

Cor : Si $f=o(g)$ au voisinage de a et g intégrable sur I alors f l'est aussi.

Si $f\underset{a}{\sim}g$ alors f est intégrable sur I ssi g l'est.

Pour étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle d'extrémités $a\leq b\in\overline{\mathbb{R}}$:
On commence par déterminer le plus grand intervalle d'extrémités a et b sur lequel f est définie et continue par morceaux.

- Si l'intervalle est un segment : l'intégrale existe.
- Si l'intervalle est semi-ouvert : on étudie l'extrémité ouverte par comparaison.
- Si l'intervalle est ouvert : on le scinde en deux intervalles semi-ouverts.

2°) Intégrabilité sur $[a,+\infty[$

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

Outil : S'il existe $f(t)\underset{+\infty}{\sim}C/t^\alpha$ (avec $C\neq 0$) alors f est intégrable sur I ssi $\alpha>1$.

Outil : S'il existe $\alpha>1$ tel que $t^\alpha f(t)\underset{+\infty}{\to}0$ alors f est intégrable sur I.

Outil : Si $tf(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell\neq 0$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

3°) Intégrabilité sur $]0,a]$

Soit $f:]0,a]\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

Outil : Si f admet une limite finie en 0, ou plus généralement si f est bornée au voisinage de 0 alors f est intégrable sur $]0,a]$.

Outil : Si $f(t)\underset{0}{\sim}C/t^\alpha$ (avec $C\neq 0$) alors f est intégrable ssi $\alpha<1$.

Outil : S'il existe $\alpha<1$ tel que $t^\alpha f(t)\underset{t\to 0}{\to}0$ alors f est intégrable sur $]0,a]$.

Outil : Si $tf(t)\xrightarrow[t\to 0]{}\ell\neq 0$ alors f n'est pas intégrable sur $]0,a]$.

4°) Intégrabilité sur $]a,b]$

Soit $f:]a,b]\to\mathbb{C}$ continue par morceaux.

Outil : Si f admet une limite finie en a ou plus généralement si f est bornée au voisinage de a alors f est intégrable sur $]a,b]$.

Outil : Si $f(t)\underset{a}{\sim}\dfrac{C}{(t-a)^\alpha}$ (avec $C\neq 0$) alors f est intégrable sur I ssi $\alpha<1$.

Outil : S'il existe $\alpha<1$ tel que $(t-a)^\alpha f(t)\underset{t\to a}{\to}0$ alors f est intégrable sur I.

IV. Calculs d'intégrales

1°) Schéma d'étude

Pour calculer $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ on en justifie l'existence par les outils qui précèdent et on en calcule la valeur par convergence : $\int_{[a,b[} f = \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f$, etc… Autrement dit on calcule « les intégrales partielles » et on passe à la limite.

2°) Intégration par parties

Pour réaliser une intégration par parties sur $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, on opère sur les segments et on passe à la limite.

3°) Changement de variable

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to J$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme et $f : J \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

f est intégrable sur J ssi $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ est intégrable sur J.

De plus si tel est le cas : $\int_{t=a}^{t=b}(f\circ\varphi)(t)\times\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{u=\lim\limits_{b}\varphi}^{u=\lim\limits_{a}\varphi} f(u)\mathrm{d}u$

avec $a \le b$ les extrémités de I.

4°) Intégrabilité et convergence

Déf : Soit I un intervalle d'extrémités $a \le b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ssi, pour $c \in]a,b[$, $\lim\limits_{\alpha\to a}\int_\alpha^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{\beta\to b}\int_c^\beta f(t)\mathrm{d}t$ existent dans $\mathbb{R}$. Cette notion ne dépend pas du choix de c.

Prop : Pour $f : I \to \mathbb{R}^+$: f est intégrable sur I ssi $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour $f : I \to \mathbb{C}$: si f est intégrable sur I alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.